Аннотация

В данной работе даётся полное обоснование метода канонических нормировок полиэдральных комплексов для подъёма разбиений евклидова пространства. Предложен новый комбинаторно-геометрический подход к построению женератрисы разбиения на основе операции подъёма грани до уже построенного соседа.

На основе изложенного общего подхода даётся новое, существенно сокращённое по сравнению с имеющимися, геометрическое доказательство фундаментальной теоремы из теории параллелоэдров, что для данного параллелоэдра P гипотеза Вороного верна тогда и только тогда, когда для соответствующего разбиения $\mathcal{T}_P$ существует каноническая нормировка.

Ключевые слова: параллелоэдры, гипотеза Вороного, женератриса, каноническая нормировка

УДК 514.174 + 514.87

Геометрия подъёмов разбиений евклидовых пространств

А.А. Гаврилюк

27 января 2015 г.

1 Введение, основные понятия

1.1 Разбиение на параллелоэдры и подъёмы разбиений

Основы теории параллелоэдров были заложены в работе кристаллографа Е.С. Фёдорова [1] (1885) и были сформулированы для размерности 3. В общем случае d-мерным *параллелоэдром* называется выпуклый евклидов многогранник P, который своими параллельными копиями разбивает пространство $\mathbb{R}^d$ нормальным образом, то есть так, что пересечение любых двух многогранников либо пусто, либо является их общей целой гранью некоторой размерности. Важное свойство, связывающее параллелоэдры с теорией чисел — то, что центры параллелоэдров образуют d-мерную целочисленную решётку $\Lambda^d(P)$ в некотором базисе пространства $\mathbb{E}^d$ [2].

Г. Минковский [3] доказал замечательную теорему, дающую необходимые условия того, что выпуклый многогранник является параллелоэдром:

Теорема (Минковский). *Если P — d-мерный параллелоэдр, то (1) многогранник P центрально-симметричен, (2) все его гиперграни центрально-симметричны.*

Позднее эти условия были дополнены ещё одним:

Теорема (Венков, Делоне). *Проекция d-мерного параллелоэдра P вдоль каждой его $(d-2)$-грани на дополнительную 2-мерную плоскость является либо параллелограммом, либо центрально-симметричным шестиугольником.*

Долгое время это условие также приписывалось Минковскому, однако ни в оригинальной работе [3], ни в прочих работах Минковского этот результат не только не сформулирован явно, но, судя по всему, и вовсе не упоминается. Впервые это условие упоминается, по всей видимости, в работе Б.Н. Делоне [4], однако как отдельная теорема оно также не формулируется. Лишь в статье Б.А. Венкова [5] в 1954 году (то есть через 25 лет после публикации работы Делоне и более чем через 50 лет после выхода в свет работы Минковского) эти условия были собраны вместе и было показано, что выполнения этих трёх условий достаточно, чтобы выпуклый многогранник являлся параллелоэдром.

Одна из основных задач теории параллелоэдров — нахождение алгоритма, перечисляющего для данной размерности все комбинаторные типы параллелоэдров. Эта задача до сих пор остаётся нерешённой. Г.Х. Вороной [6] построил теорию параллелоэдров специального вида, ныне носящих его имя, и привёл алгоритм перечисления всех их комбинаторных типов. Под *параллелоэдром Вороного* P_V мы понимаем область Дирихле некоторой точки $\mathbf{p}$ из d-мерной целочисленной решётки $\Lambda^d \subset \mathbb{R}^d$:

$$P_V = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{E}^d : \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| \leqslant \|\mathbf{x} - \mathbf{q}\| \; \forall \mathbf{q} \in \Lambda^d \right\}$$

Легко проверяется, что такая область действительно является параллелоэдром. Вороной высказал гипотезу о том, что любой параллелоэдр общего вида аффинно-эквивалентен некоторому параллелоэдру P_V. Доказательство этой гипотезы будет означать, что алгоритм Вороного перечисляет и все комбинаторные типы параллелоэдров в общем случае.

Нормальное разбиение $\mathcal{T}_P$ называется *примитивным* в n-мерной грани F^n, $0 \leqslant n \leqslant d-1$, если в этой грани сходятся в точности $(d+1-n)$ d-мерных ячеек разбиения, что является минимально возможным количеством для заданных n и d. Саму грань F^n в таком случае мы будем называть *примитивной*. Если многогранник примитивен во всех своих k-гранях, то он называется *k-примитивным*.

Вороной доказал свою гипотезу для 0-примитивных параллелоэдров (называются просто *примитивными*). Для разбиения на такие параллелоэдры он построил специальную функцию — женератрису, график $\mathcal{G}_P$ которой является d-мерной границей неограниченного $(d+1)$-мерного полиэдра и проектируется в точности в разбиение $\mathcal{T}_P$. $\mathcal{G}_P$ при этом естественно рассматривать как подъём разбиения $\mathcal{T}_P$ над $\mathbb{E}^d$.

О.К. Житомирский [7] усилил теорему Вороного и доказал гипотезу для очень широкого класса — $(d-2)$-примитивных параллелоэдров. Это ограничение эквивалентно тому, что в каждой $(d-2)$-мерной грани сходятся ровно 3 параллелоэдра и является, в некотором смысле, самым слабым ограничением (то есть дающим самый сильный результат), определяемым через примитивность. Это следует из простого наблюдения, что всякий k-примитивный параллелоэдр $(0 \leqslant k \leqslant d-2)$, также является $(k+1)$-примитивным.

Много позднее, более детальным рассмотрением локальной структуры были получены различные усиления случая Житомирского: для *3-неразложимых* параллелоэдров [8], при *односвязной δ-поверхности* [9], для суммы параллелоэдра и отрезка [10, 11]. Альтернативный подход к доказательству гипотезы предложил Р. Эрдал [12] для параллелоэдров, являющихся зоноэдрами.

Конструкция подъёма разбиений рассматривается и для общих локально-конечных разбиений евклидова пространства. В случае примитивных разбиений подъём можно совершать без дополнительных конструкций. Для этого сперва надо сделать произвольный согласованный подъём двух начальных смежных d-ячеек. Далее достаточно добавлять к уже поднятому участку новые подъёмы, смежные с какой-то одной поднятой ячейкой по гиперграни, а с другой — хотя бы по ребру. Как показано в [13], при $d \geqslant 3$ для конечных примитивных разбиений такое построение всегда корректно определяет однозначный подъём.

Для общих разбиений такое построение может оказаться несогласованным, поэтому требуются дополнительные ограничения. Таким ограничением обычно служит существо-

вание *ортогонально-дуального* множества: каждой ячейке разбиения сопоставляется точка такого множества. При этом отрезок, соединяющий точки для смежных ячеек, должен быть ортогонален их общей гиперграни [14]. На практике построение такого множества (и в такой формулировке) бывает затруднительно.

Канонические нормировки, впервые появившиеся в "чистом" виде, по всей видимости, в [8], с одной стороны эквивалентны конструкции ортогонально-дуальных множеств, с другой — позволяют более эффективно работать с локальной структурой разбиений. Не смотря на появившиеся в последнее время результаты, полученные при помощи этой техники [8, 9], полного её обоснования никогда не было приведено: имеющиеся изложения используют другие эквивалентные конструкции и исключительно аналитическое их описание.

В данной работе приведено полное самодостаточное обоснование метода канонических нормировок (с единственной существенно используемой ссылкой на теорему 1.4), приведён новый геометрический подход к построению женератрисы разбиения общего вида на основе операции подъёма грани до ранее поднятого соседа (определение 2.1). Приведены геометрические доказательства (теорема 2.3, теорема 2.10) того, что в результате такого построения получается d-мерное полиэдральное многообразие, ограничивающее выпуклый полиэдр. Далее на основе этого построения приводится существенно более короткое, чем другие аналогичные ([15], в частном случае [6]) геометрически прозрачное доказательство фундаментальной теоремы 3.11 о том, что для параллелоэдра P верна гипотеза Вороного тогда и только тогда, когда для соответствующего разбиения $\mathcal{T}_P$ существует каноническая нормировка. Применение подхода иллюстрируется на доказательстве теоремы Житомирского.

1.2 Функции приращения

Рассмотрим некоторый однородный n-мерный полиэдральный комплекс $\mathcal{K}^n$. *Цепью* в $\mathcal{K}^n$ называется произвольная последовательность n-мерных ячеек $[c_1, \ldots, c_k]$, в которой любые две последовательные ячейки *смежны*, то есть имеют общую $(n-1)$-грань. *(Комбинаторным) циклом* называется произвольная цепь, у которой первая и последняя ячейки смежны. Инцидентность ячеек комплекса комплекса тут и далее мы индуктивно определяем через смежность по $(d-1)$-граням:

Определение 1.1 (Локальная структура комплекса)**.**

- *Если n-мерные ячейки c и c' смежны, то есть имеют общую $(d-1)$-грань F^{d-1}, то каждая подгрань $G \subseteq F^{d-1}$ считается общей для c и c'*
- *Если для грани G и ячеек c и c' найдётся соединяющая их цепь $[c = c_1, c_2, \ldots, c_k = c']$ такая, что $G \subseteq c_1 \bigcap c_2$, а значит является гранью и c, и c', $G \subseteq c_2 \bigcap c_3$, а значит является гранью и c_3, и так далее до $G \subseteq c_{k-1} \bigcap c_k$, а значит является гранью и $c' = c_k$, то G считается общей гранью для c и c'.*

Такая цепь n-мерных ячеек $[c_1, c_2, \ldots, c_k]$, все из которых содержат некоторую общую k-мерную грань G, называется *k-примитивной*.

Замечание. *В случае разбиений пространств такое определение инцидентности совпадает со стандартным теоретико-множественным определением через пересечение многогранников как точечных множеств. Однако для более изощрённых структур, например подмножеств разбиений пространства или абстрактно заданных полиэдральных многообразий не вложенных в евклидово пространство, теоретико-множественное определение может оказаться неудобным или вовсе неопределённым. Описанное же определение работает всегда, когда заданы смежности по* $(d-1)$*-граням (см., например, [16]).*

Нормировкой комплекса $\mathcal{K}^n$ будем называть произвольную функцию s, определённую на $\mathcal{F}^n = \mathcal{F}^n_{\mathcal{K}^n}$ — множестве n-мерных граней $\mathcal{K}^n$.

Определение 1.2 (Мультипликативные приращения)**.** *Пусть для каждой упорядоченной пары смежных n-мерных ячеек c_1 и c_2 определена функция $g: [c_1, c_2] \to \mathbb{R}_+$ такая, что $g[c_1, c_2] \cdot g[c_2, c_1] = 1$.* Мультипликативным приращением *вдоль цепи $[c_1, c_2, \ldots, c_k]$ называется продолжение функции g по естественному правилу*

$$g[c_1, c_2, \ldots, c_k] = g[c_1, c_2]g[c_2, c_3] \cdot \ldots \cdot g[c_{k-1}, c_k]$$

Если зафиксировать некоторые ячейку c_0 и положительное значение s_0, то правило $s(c) := s_0 \cdot g[c_0, c_1, \ldots, c]$ по мультипликативному приращению задаёт на $\mathcal{K}^n$ положительно определённую нормировку, которая, вообще говоря, зависит от цепи, соединяющей ячейки c_0 и c.

Определение 1.3 (Аддитивные приращения)**.** Аддитивным приращением *называется функция $g: [c_1, c_2] \to \mathbb{R}^k, k \in \mathbb{N}$ с условием $g[c_1, c_2] + g[c_2, c_1] = 0$, продолженная на цепи комплекса по правилу $g[c_1, c_2, \ldots, c_k] := g[c_1, c_2] + \ldots + g[c_{k-1}, c_k]$.*

Аналогично, для фиксированной ячейки c_0 и произвольного значения $v_0 \in \mathbb{R}^k$ правило $s(c) := v_0 + g[c_0, c_1, \ldots, c]$ задаёт вектор-значную нормировку.

Очевидно, что нормировка определена приращениями однозначно с точностью до начального значения тогда и только тогда, когда приращения вдоль любых двух цепей с общими началом и концом, равны. Проверку этого свойства существенно упрощает теорема о переносе свойства С. Рышкова и К. Рыбникова [17]. Авторы доказали свою теорему для более широкого класса комплексов, чем потребует данная работа, поэтому мы приведём упрощённую версию:

Теорема 1.4 (О переносе свойства)**.** *Рассмотрим n-мерный комплекс $\mathcal{K}^n$ в $\mathbb{R}^d$, который является либо локально-конечным разбиением $\mathbb{R}^d$, либо остовом размерности $n \geqslant 2$ такого разбиения. Пусть на всех парах смежных n-мерных ячеек в $\mathcal{K}^n$ заданы приращения $g[c_1, c_2]$ и по некоторой начальной ячейке c_0 и значению на ней s_0 задана нормировка s данного комплекса. Функция s, как функция только от ячеек разбиения, существует (и определена однозначно с точностью до выбора начального значения) тогда и только тогда, когда приращение вдоль всех $(n-2)$-примитивных циклов равно 1 в случае мультипликативных приращений, либо 0 в случае аддитивных приращений.*

1.3 Канонические нормировки

Рассмотрим нормальное (то есть грань-в-грань) разбиение $\mathcal{T}$ пространства $\mathbb{R}^d$ на строго выпуклые многогранники. Пусть задана положительная нормировка $s: \mathcal{F}^{d-1} \to \mathbb{R}_+$ $(d-1)$-мерного остова $\mathcal{F}^{d-1}$ разбиения $\mathcal{T}$. Пусть $F_1, F_2, \ldots, F_k$ — все гиперграни разбиения, которые содержат $(d-2)$-грань $F^{d-2} \subset \mathcal{F}^{d-2}$. На них естественным образом определены два противоположных направления обхода, которые определяются проекцией гиперграней F_i и самой F^{d-2} в двумерную плоскость дополнительную к аффинной оболочке $aff\left(F^{d-2}\right)$. Будем считать, что нумерация $F_1, F_2, \ldots, F_k$ задана одним из этих двух направлений обхода, и, согласованно с тем же направлением, выбраны единичные нормали $\mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_k$ к данным гиперграням. *Кручением* Δ_s нормировки s вокруг $(d-2)$-грани F^{d-2} назовём величину

$$\Delta_s(F^{d-2}) := \sum_{i=0}^{k} s(F_i)\mathbf{n}_i$$

Из определения следует, что кручение определено с точностью до знака и, вообще говоря, зависит от выбора направления обхода. Однако нас интересует лишь равенство или неравенство кручения нулю, что от направления обхода не зависит.

Нормировка s множества гиперграней $\mathcal{F}^{d-1}$ разбиения $\mathcal{T}$ называется *канонической*, если для любой $(d-2)$-грани $F^{d-2} \subset \mathcal{T}$ выполнено $\Delta_s(F^{d-2}) = 0$.

Локальной канонической нормировкой $s: \mathcal{S}^{d-1} \to \mathbb{R}_+$ подкомплекса $\mathcal{S}^{d-1} \subset \mathcal{T}$ мы называем нормировку с нулевым кручением для всякой $(d-2)$-грани $F^{d-2} \subset \mathcal{S}^{d-1}$, звезда $St_{\mathcal{T}}(F^{d-2})$ которой, определённая по комплексу $\mathcal{T}$, принадлежит и подкомплексу $\mathcal{S}^{d-1}$.

Следующая лемма — одно из ключевых утверждений при рассмотрении канонических нормировок:

Лемма 1.5. *Пусть F^{d-2} — $(d-2)$-грань разбиения $\mathcal{T}$, в которой сходятся ровно 3 гиперграни F_1, F_2 и F_3 из $\mathcal{T}$. Пусть $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$ — два подкомплекса в $\mathcal{T}$, оба целиком содержат звезду $St_{\mathcal{T}}(F^{d-2})$. Пусть на этих подкомплексах заданы (локальные) канонические нормировки s и s'. Тогда выполнено равенство:*

$$\frac{s'(F_1)}{s'(F_2)} = \frac{s(F_1)}{s(F_2)}$$

Доказательство. По определению канонической нормировки имеем:

$$s(F_1)\mathbf{n}_1 + s(F_2)\mathbf{n}_2 + s(F_3)\mathbf{n}_3 = s'(F_1)\mathbf{n}_1 + s'(F_2)\mathbf{n}_2 + s'(F_3)\mathbf{n}_3 = 0,\ s(F_i) > 0, s'(F_i) > 0$$

Отметим, что из строгой выпуклости ячеек $\mathcal{T}$ следует, что среди F_1, F_2, F_3 не может быть двух параллельных гиперграней. Таким образом, $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_3$ не параллельны. Значит, если $\mathbf{n}_2$ раскладывается по этим векторам, то единственным образом. В частности, коэффициент при $\mathbf{n}_1$ в таком разложении определён однозначно. С другой стороны, из выписанных равенств имеем:

$$\mathbf{n}_2 = -\frac{s(F_1)}{s(F_2)}\mathbf{n}_1 - \frac{s(F_3)}{s(F_2)}\mathbf{n}_3 = -\frac{s'(F_1)}{s'(F_2)}\mathbf{n}_1 - \frac{s'(F_3)}{s'(F_2)}\mathbf{n}_3$$

$\square$

Вернёмся от общих разбиений пространства к разбиению на копии заданного параллелоэдра P. Для таких разбиений кроме примитивных граней следует выделить важный класс стандартных граней, введённых в [2]. Грань F^n разбиения $\mathcal{T}_P$ называется *стандартной*, если её можно представить в виде $F^n = P \bigcap P'$ для некоторых ячеек P и P' разбиения. Из центральной симметрии параллелоэдров следует, в частности, что стандартные грани центрально симметричны, и их центры симметрии являются также центрами симметрии разбиения $\mathcal{T}_P$ и решётки $\Lambda^d(P)$.

Из условия Венкова-Делоне следует следующая простая классификация схождений параллелоэдров в $(d-2)$-гранях:

Предложение 1.6. *Произвольная $(d-2)$-грань разбиения $\mathcal{T}_P$ является либо примитивной, в которой сходятся 3 гиперграни разбиения, либо стандартной, в которой сходятся 4 гиперграни F_1, F_2, F_3, F_4, причём $F_1||F_3$ и $F_2||F_4$.*

Гиперграни параллелоэдров являются частным случаем стандартных граней. То есть центр каждой гиперграни является также центром симметрии разбиения. Рассмотрим две смежные по $(d-2)$-грани F_{12}^{d-2} гиперграни F_1, F_2 некоторого параллелоэдра $P_1 \subset \mathcal{T}_P$. Пусть $F_1' \subset \mathcal{T}_P$ — это образ F_1 при симметрии относительно центра F_2. Отметим, что F_1' и F_2 также смежны и принадлежат параллелоэдру $P_1' = Sym_{c(F_2)}(P_1)$ данного разбиения. Будем называть такую пару гиперграней F_1 и F_1' *накрест лежащими* относительно (смежной с ними обеими) F_2.

Лемма 1.7. *Пусть задана каноническая нормировка s разбиения $\mathcal{T}_P$, и пусть $[F_1, F_2, \ldots, F_6]$ — произвольный 6-поясок параллелоэдра $P_0 \subset \mathcal{T}_P$ Пусть F_0 — третья гипергрань в $\mathcal{T}_P$, содержащая $(d-2)$-грань $F_2 \bigcap F_3$ (помимо самих F_2 и F_3). Тогда (1) нормировки на противоположных гипергранях из 6-пояска равны, (2) нормировки на накрест лежащих гипергранях F_1 и F_0 равны.*

Доказательство. Докажем сначала пункт 2. F_1 и F_0 — накрест лежащие относительно F_2. Применим к разбиению $\mathcal{T}_P$ симметрию $c(F_2)$. F_1 и F_0 поменяются местами, сама F_2 и $\mathcal{T}_P$ перейдут в себя. Нормировка s перейдёт в некоторую нормировку s' разбиения $\mathcal{T}_P$, причём $s'(F) = s\left(Sym_{c(F_2)}F\right)$. Из леммы 1.5 и симметрии имеем $\frac{s(F_1)}{s(F_2)} = \frac{s'(F_1)}{s'(F_2)} = \frac{s(F_0)}{s(F_2)}$. Значит $s(F_1) = s(F_0)$ и пункт 2 доказан. Согласно этому пункту также верно $s(F_4) = s(F_0)$. Значит $s(F_4) = s(F_1)$ и пункт 1 также доказан. $\square$

Из леммы 1.5 и предложения 1.6 следует, что канонические нормировки звезды $St_{\mathcal{T}_P}(F^{d-2})$ произвольной $(d-2)$-грани F^{d-2} разбиения $\mathcal{T}_P$ описываются следующим образом:

Предложение 1.8. *Если F^{d-2} примитивна, то локальная каноническая нормировка s её звезды единственна с точностью до положительного общего множителя, иначе F^{d-2} стандартна и нормировка s четырёх содержащих её гиперграней $F_1||F_3$ и $F_2||F_4$ является канонической тогда и только тогда, когда выполняются равенства*

$$s(F_1) = s(F_3) > 0,\ s(F_2) = s(F_4) > 0$$

Далее нам потребуется усиление этого утверждения:

Теорема 1.9 (Делоне [4]). *Звёзды произвольных $(d-2)$- и $(d-3)$-граней параллелоэдров имеют канонические нормировки (не менее одной).*

1.4 Склейка локальных нормировок

Одна из основных функций локальных канонических нормировок — построение по ним канонических нормировок всего разбиения. Такое построение происходит при помощи *склейки* нормировок. Пусть каноническая нормировка s задана на комплексе $\mathcal{K}$, каноническая нормировка s' — на комплексе $\mathcal{K}'$. Очевидно, что на $\mathcal{K}'$ также определены канонические нормировки вида ks' для произвольного $k > 0$. Для склейки s и s' подбирается такое k, чтобы

- s и ks' совпадали на $\mathcal{K} \bigcap \mathcal{K}'$
- условие каноничности для расширенной нормировки $\overline{s} = s \bigcup ks'$, то есть равенство нулю кручения $\Delta_{\overline{s}}$ нормировки $\overline{s}$, выполнялось вокруг произвольной $(d-2)$-грани объединённого комплекса $\mathcal{K} \bigcup \mathcal{K}'$

Очевидно, что процесс склейки в такой форме осуществим только если s и s' пропорциональны на $\mathcal{K} \bigcap \mathcal{K}'$, что, вообще говоря, не гарантируется.

Иногда удаётся упростить склейку, перейдя от нормировок к соответствующим функциям приращения: $g[F_1, F_2] = \frac{s(F_1)}{s(F_2)}$ для гиперграней F_1 и F_2, принадлежащих общей d-мерной ячейке разбиения и пересекающихся по некоторой $(d-2)$ грани F^{d-2}. Преимущество такого подхода в том, что если F^{d-2} примитивна, то, согласно лемме 1.5, приращение $g[F_1, F_2]$ определено однозначно и, соответственно, совпадает для нормировок s и s'. В других случаях может потребоваться нетривиальное обоснование того, что g и g' можно определить согласованно. Затем по общей функции приращения $\overline{g}$ восстанавливается общая нормировка $\overline{s}$, и требуется доказать её однозначность — например, при помощи теоремы о переносе свойства 1.4. Проиллюстрируем этот подход на важном случае Житомирского.

1.5 Глобальная каноническая нормировка, случай Житомирского

Лемма 1.10. *Для произвольного $(d-2)$-примитивного параллелоэдра P существует каноническая нормировка соответствующего разбиения $\mathcal{T}_P$.*

Доказательство. В случае $d = 2$ $(d-2)$-примитивными параллелоэдрами будут лишь центрально симметричные выпуклые шестиугольники. Согласно предложению 1.8 существует каноническая нормировка s звезды произвольной вершины v. Гиперграни этой звезды $St_{\mathcal{T}_P}(v)$ — это одномерные рёбра e_1, e_2, e_3. Припишем каждому ребру разбиения, параллельному e_1, нормировку $s(e_1)$, ребру параллельному e_2 — нормировку $s(e_2)$, ребру параллельному e_3 — $s(e_3)$. Очевидно, что все кручения в таком случае равны, с точностью до знака, кручению вокруг v, то есть равны 0. Значит построенная нормировка каноническая.

Далее считаем $d \geqslant 3$. По условию разбиение $\mathcal{T}_P$ $(d-2)$-примитивно, значит если две гиперграни F_1, F_2 данного разбиения имеют общую $(d-2)$-грань, то, по предложению 1.8, приращение $g[F_1, F_2]$ определено однозначно. Значит оно определено однозначно и для любой цепи на $(d-1)$-остове $\mathcal{F}^{d-1}$. Воспользуемся теоремой 1.4 о переносе свойства.

Необходимо показать, что приращение вдоль произвольного $(d-3)$-примитивного цикла $g[F_1, \ldots, F_n, F_1]$ равно 1. Все $(d-1)$-мерные ячейки этого цикла имеют некоторую общую $(d-3)$-грань F^{d-3}. По теореме 1.9 для $St_{\mathcal{T}_P}(F^{d-3})$ существует каноническая нормировка s_l. Как было отмечено выше, приращение $g[F_i, F_{i+1}]$ при переходе через примитивную $(d-2)$-грань определено однозначно. В частности, для данных F_i имеем $g[F_i, F_{i+1}] = \frac{s_l(F_{i+1})}{s_l(F_i)}$ (полагаем $F_{n+1} = F_1$). Поэтому приращение вдоль рассматриваемого цикла равно

$$g[F_1, \ldots, F_n, F_1] = \frac{s_l(F_2)}{s_l(F_1)} \frac{s_l(F_3)}{s_l(F_2)} \cdot \ldots \cdot \frac{s_l(F_1)}{s_l(F_n)} = 1$$

□

2 Женератриса разбиения

2.1 Подъём многогранников

Далее считаем заданными локально-конечное нормальное разбиение $\mathcal{T}$ пространства $\mathbb{E}^d$ и каноническую нормировку $s : \mathcal{F}^{d-1} \to \mathbb{R}_+$ разбиения $\mathcal{T}$. По заданным разбиению и нормировке требуется построить d-мерную полиэдральную поверхность $\mathcal{G}$ в расширенном пространстве $\mathbb{E}^{d+1}$ (ограничивающую $(d+1)$-мерный полиэдр), грани которой при ортогональной проекции взаимно однозначно переходят в грани тех же размерностей из $\mathcal{T}$.

Пусть $\mathbb{E}^d$ вложено в $\mathbb{E}^{d+1}$ как d-мерная гиперплоскость. *Подъёмом* k-мерного многогранника $P^k \subset \mathbb{E}^d$, $k \leqslant d$ будем называть всякий k-мерный многогранник $\widetilde{P^k}$ (не параллельный нормали к $\mathbb{E}^d$) такой, что его ортогональная проекция $\Pr\left(\widetilde{P^k}\right)$ на $\mathbb{E}^d$ совпадает с P^k. Тут и далее, когда это не вызывает путаницы, под $\mathbb{E}^d$ мы понимаем исходное подпространство в $\mathbb{E}^{d+1}$, в котором находится поднимаемый комплекс.

Определение 2.1. *Пусть заданы два выпуклых многогранника $P_1^l, P_2^m \subset \mathbb{E}^d$, $l, m \leqslant d$, пересечение которых является гранью каждого из них. Пусть также задан подъём P_1^l — l-мерный многогранник $\widetilde{P_1^l}$ в $\mathbb{E}^{d+1}$, тогда* подъёмом P_2^m до $\widetilde{P_1^l}$ *будем называть такой подъём $\widetilde{P_2^m}$ (в том же $\mathbb{E}^{d+1}$), что пересечение $\widetilde{P_1^l} \bigcap \widetilde{P_2^m}$ является гранью каждого из многогранников $\widetilde{P_1^l}$ и $\widetilde{P_2^m}$, и его проекция на $\mathbb{E}^d$ совпадает с $P_1^l \bigcap P_2^m$. Иными словами — если $\widetilde{P_1^l} \bigcap \widetilde{P_2^m}$ является подъёмом $P_1^l \bigcap P_2^m$.*

Лемма 2.2. *Пусть заданы два выпуклых d-мерных многогранника $P_1, P_2 \subset \mathbb{E}^d$, смежные по $(d-1)$-грани F^{d-1} с нормалью $\mathbf{n} \in \mathbb{E}^d$ к этой грани. Пусть данное пространство $\mathbb{E}^d$ вложено в $\mathbb{E}^{d+1}$ как гиперплоскость и задан некоторый подъём многогранника P_1 — d-мерный многогранник $\widetilde{P_1} \subset \mathbb{E}^{d+1}$ с нормалью $\mathbf{n_1} \in \mathbb{E}^{d+1}$. Тогда существует единственный подъём многогранника P_2 до $\widetilde{P_1}$ с вектором нормали этого подъёма равным $\mathbf{n_1} + \mathbf{n}$.*

Доказательство. Обозначим через Pr_1 ограничение $\mathrm{Pr}\,|_{aff\left(\widetilde{P_1}\right)} : aff\left(\widetilde{P_1}\right) \to \mathbb{E}^d$ проекции Pr на d-мерное аффинное подпространство многогранника $\widetilde{P_1}$. Размерность образа и прообраза при проекции Pr_1 совпадают, значит ядро этого отображения нулевое и Pr_1 биективно переводит k-мерные грани $\widetilde{P_1}$ в k-мерные грани P_1 для произвольного $0 \leqslant k \leqslant d$. Кроме того, по определению подъёма, $\mathbf{n}_1 \nparallel \mathbb{E}^d$. Обозначим через $\widetilde{F^{d-1}}$ прообраз F^{d-1} при проекции Pr_1, а через $\widetilde{L^{d-1}}$ и L^{d-1} — их аффинные оболочки. Очевидно $\mathrm{Pr}_1\left(\widetilde{L^{d-1}}\right) = L^{d-1}$.

Покажем, что вектор $\mathbf{n_1} + \mathbf{n}$ ортогонален $\widetilde{L^{d-1}}$. Так как $\mathbf{n}_1 \perp aff\left(\widetilde{P_1}\right)$, то $\mathbf{n}_1 \perp \widetilde{L^{d-1}} \subset aff\left(\widetilde{P_1}\right)$. Пусть $\mathbf{n}_0 \in \mathbb{E}^{d+1}$ — нормаль к $\mathbb{E}^d$, тогда очевидно, что $\mathbf{n}_0$ отображается в нулевой вектор проекцией Pr всего пространства $\mathbb{E}^{d+1}$ и является образующей в $\ker \mathrm{Pr}$. Отсюда и из того, что $\mathrm{Pr}\left(\widetilde{L^{d-1}}\right) = L^{d-1}$, следует, что $\widetilde{L^{d-1}}$ принадлежит $L^{d-1} \times lin\left(\mathbf{n}_0\right)$, то есть $\widetilde{L^{d-1}}$ лежит в перпендикулярной к $\mathbb{E}^d$ d-плоскости, содержащей L^{d-1}. По условию $\mathbf{n} \perp L^{d-1}$, кроме того $\mathbf{n} \perp \mathbf{n}_0$ так как $\mathbf{n}_0 \perp \mathbb{E}^d$ и $\mathbf{n} \in \mathbb{E}^d$ по условию. Следовательно $\mathbf{n} \perp L^{d-1} \times lin\left(\mathbf{n}_0\right)$, откуда имеем $\mathbf{n} \perp \widetilde{L^{d-1}}$. Таким образом, показано, что $\mathbf{n_1} + \mathbf{n}$ ортогонален $\widetilde{L^{d-1}}$.

Выберем произвольную точку $A \in \widetilde{L^{d-1}}$ и проведём через неё d-мерную плоскость π_2^d, ортогональную вектору $\mathbf{n_1} + \mathbf{n}$. По нормали и одной своей точке гиперплоскость π_2^d восстанавливается однозначно. По построению $\widetilde{L^{d-1}}$ параллельно π_2^d и их пересечение непусто, значит $\widetilde{L^{d-1}}$ принадлежит π_2^d. Отсюда имеем, что $aff\left(\widetilde{P_1}\right) \bigcap \pi_2^d = \widetilde{L^{d-1}}$, так как это пересечение содержит $\widetilde{L^{d-1}}$ и при этом не может быть d-мерным: нормали этих d-подпространств $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}$ не параллельны. Плоскость π_2^d не ортогональна $\mathbb{E}^d$, так как $\left(\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}\right) \nparallel E^d$. Значит ограничение проекции Pr на π_2^d — проекция $\mathrm{Pr}_2 := \mathrm{Pr}\,|_{\pi_2^d} : \pi_2^d \to \mathbb{E}^d$ также является невырожденным аффинным преобразованием. В частности, для него однозначно определено обратное аффинное преобразование $\mathrm{Pr}_2^{-1} : \mathbb{E}^d \to \pi_2^d$.

Убедимся, что $\mathrm{Pr}_2^{-1}\left(P_2\right)$ и есть искомый подъём $\widetilde{P_2}$. Отметим, что ограничения Pr_1 и Pr_2 на $\widetilde{L^{d-1}}$ суть одно и то же преобразование — ограничение порождающей их проекции Pr на $\widetilde{L^{d-1}}$. Отсюда $\mathrm{Pr}_2^{-1}\left(F^{d-1}\right) = \widetilde{F^{d-1}}$. Далее, так как $aff\left(\widetilde{P_1}\right) \bigcap \pi_2^d = \widetilde{L^{d-1}}$, то пересечение $\mathrm{Pr}_2^{-1}\left(P_2\right)$ с $\widetilde{P_1}$ принадлежит их общему подпространству $\widetilde{L^{d-1}}$. Тогда $\mathrm{Pr}_2^{-1}\left(P_2\right) \bigcap \widetilde{P_1} = \mathrm{Pr}_2^{-1}\left(P_2\right) \bigcap \widetilde{L^{d-1}} \bigcap \widetilde{P_1} = \mathrm{Pr}_2^{-1}\left(P_2 \bigcap L^{d-1}\right) \bigcap \widetilde{P_1} = \mathrm{Pr}_2^{-1}\left(F^{d-1}\right) \bigcap \widetilde{P_1} = \widetilde{F^{d-1}} \bigcap \widetilde{P_1} = \widetilde{F^{d-1}}$. Таким образом, пересечение $\mathrm{Pr}_2^{-1}\left(P_2\right)$ с $\widetilde{P_1}$ является гранью каждого и является подъёмом для $F^{d-1} = P_1 \bigcap P_2$. По построению $\mathrm{Pr}_2^{-1}\left(P_2\right)$ имеет размерность d и ортогонален вектору $\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}$. Значит $\mathrm{Pr}_2^{-1}\left(P_2\right)$ действительно является подъёмом P_2 до $\widetilde{P_1}$. Кроме того, мы показали, что d-плоскость $aff\left(\widetilde{P_2}\right)$ определена однозначно, так же как и отображение $\mathrm{Pr}^{-1}\,|_{aff\left(\widetilde{P_2}\right)} : \mathbb{E}^d \to aff\left(\widetilde{P_2}\right)$. Значит подъём $\widetilde{P_2}$ существует и определён однозначно. □

Если, как в условии леммы 2.2, подъём ячейки P_2 до поднятой ячейки $\widetilde{P_1}$ задан при помощи вектора $\mathbf{n}$ ортогонального общей гиперграни P_1 и P_2, то будем говорить, что $\widetilde{P_2}$ является подъёмом P_2 до $\widetilde{P_1}$ *с приращением нормали* $\mathbf{n}$.

2.2 Построение женератрисы

Будем считать, что пространство $\mathbb{E}^d$, в котором задано разбиение $\mathcal{T}$, вложено в пространство $\mathbb{E}^{d+1}$ как гиперплоскость $x_{d+1} = 0$. Зафиксируем нормаль $\mathbf{n}_0 = (0, \dots, 0, -1)$ к этой гиперплоскости. Для произвольных смежных d-многогранников $P_i, P_j \subset \mathcal{T}$ с общей гипергранью $P_i \bigcap P_j$ через $\mathbf{n}_{i,j}$ будем обозначать единичную нормаль к $P_i \bigcap P_j$, направленную от P_i к P_j, а через $s\left(P_i \bigcap P_j\right)$ — значение заданной канонической нормировки s на этой гиперграни разбиения.

Построим в $\mathbb{E}^{d+1}$ семейство d-многогранников $\mathcal{G} = \mathcal{G}\left(\mathcal{T}, s\right)$ по следующим правилам:

- Каждый многогранник из $\mathcal{G}$ является подъёмом некоторой d-ячейки $P \in \mathcal{T}$, занумерован при помощи некоторой цепи ячеек $[P_0, P_{i_1}, \dots, P_{i_k}, P]$, соединяющей P_0 с P, и обозначается $L\left[P_0, P_{i_1}, \dots, P_{i_k}, P\right]$

- $L\left[P_0\right]$ совпадает с ячейкой P_0, нормаль к $L\left[P_0\right]$ (в $\mathbb{E}^{d+1}$) фиксирована и равна $\mathbf{n}_0$

- $L\left[P_0, P_1, \dots, P_{k-1}, P_k\right]$ является подъёмом P_k до (ранее поднятого) $L\left[P_0, P_1, \dots, P_{k-1}\right]$ с приращением нормали $s(P_{k-1} \bigcap P_k) \cdot \mathbf{n}_{k-1,k}$

Из леммы 2.2 следует, что для произвольной цепи $[P_0, \dots, P_k]$ каждый из d-многогранников $L\left[P_0, P_1\right], L\left[P_0, P_1, P_2\right], L\left[P_0, \dots, P_k\right]$ смежен с предыдущим (для $L\left[P_0, P_1\right]$ предыдущий — $L\left[P_0\right]$ — задан в определении) и по приращениям нормали восстанавливается однозначно. Будем называть многогранники $L\left[P_0, \dots, P_k\right]$ гранями $\mathcal{G}$. Введём на $\mathcal{G}$ структуру полиэдрального комплекса:

- Будем считать d-грани $L\left[P_0, P_{i_1}, \dots, P_{i_m}\right]$ и $L\left[P_0, P_{j_1}, \dots, P_{j_n}\right]$ совпадающими, если они совпадают геометрически как точечные множества в $\mathbb{E}^{d+1}$. В частности, отсюда вытекает необходимое условие $P_{i_m} = P_{j_n}$.

- Две d-грани $\mathcal{G}$ считаем смежными тогда и только тогда, когда для них существует представление в виде $L\left[P_0, \dots, P_{k-1}\right]$ и $L\left[P_0, \dots, P_{k-1}, P_k\right]$, где они следуют одна за другой в цепочке подъёмов.

- Согласно определению 1.1, заданные смежности d-мерных граней $\mathcal{G}$ задают все остальные инцидентности в гранях меньших размерностей.

Далее под $\mathcal{G}$ мы будем понимать именно полиэдр с заданными инцидентностями (а не просто набор d-многогранников).

2.3 Однозначность проекции женератрисы

Женератрисой разбиения $\mathcal{T}$ пространства $\mathbb{E}^d$ будем называть d-мерное полиэдральное многообразие в объемлющем пространстве $\mathbb{E}^{d+1}$, ортогональная проекция которого на $\mathbb{E}^d = aff\left(\mathcal{T}\right)$ однозначна и совпадает с разбиением $\mathcal{T}$ (см. [6, 13, 14]).

Теорема 2.3. *Полиэдр $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$, построенный по канонической нормировке s является женератрисой для $\mathcal{T}$. Обратно, если задана некоторая женератриса разбиения $\mathcal{T}$, то существует каноническая нормировка s этого разбиения.*

Доказательство этой теоремы разобьём на несколько лемм.

Лемма 2.4. *Все гиперграни полиэдра $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$, являющиеся подъёмами одной и той же d-ячейки $P \subset \mathcal{T}$, параллельны друг другу.*

Доказательство. В определении $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ однозначно задана (аддитивная) функция приращения нормали при переходе от ячейки P_{i-1} к смежной ячейке P_i: $g\left[P_{i-1}, P_i\right] = s\left(P_{i-1} \bigcap P_i\right) \mathbf{n}_{i-1,i}$. Воспользуемся аддитивной версией теоремы 1.4, чтобы проверить, что приращения задают однозначную функцию $\mathbf{n}\left(P_i\right)$ нормали. Достаточно проверить, что полное приращение вдоль любого $(d-2)$-примитивного пути $\left[P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_{t+1}} = P_{i_1}\right]$ равно нулю. То есть проверить условие $\sum_{j=1}^{t} s\left(P_{i_j} \bigcap P_{i_{j+1}}\right) \mathbf{n}_{i_j, i_{j+1}} = \mathbf{0}$.

Данная цепь $(d-2)$-примитивна, значит все её ячейки содержат общую $(d-2)$-грань F^{d-2}. Отметим, что приращение на участке цепи вида $\left[P_i, P_j, P_i\right]$ равно нулю. Отсюда очевидно, что полное приращение равно приращению при обходе вокруг F^{d-2}, умноженному на индекс цепи относительно такого обхода. Индекс мы определяем как количество раз, которое была пройдена произвольная гипергрань $P_i \bigcap P_{i+1}$ данной цепи. При этом проходы в направлении обхода вокруг F^{d-2} считаем со знаком плюс, в обратном — со знаком минус. Приращение при обходе вокруг F^{d-2} равно кручению нормировки s вокруг F^{d-2} и равно нулю по определению канонической нормировки. Значит и полное приращение равно нулю. Таким образом, функция $\mathbf{n}\left(P_i\right)$ определена однозначно, нормали всех подъёмов P_i в $\mathcal{G}$ равны, а сами подъёмы — параллельны друг другу. ☐

Следствие 2.5. *Два подъёма $\widetilde{P}, \widetilde{P'} \subset \mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ одного и того же d-многогранника $P \subset \mathcal{T}$ представляют одну и ту же грань этого полиэдра тогда и только тогда, когда имеют хотя бы одну общую точку.*

Лемма 2.6. *Ортогональная проекция на $\mathcal{T}$ звезды произвольной $(d-2)$-грани $\widetilde{F^{d-2}}$ полиэдра $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ однозначна.*

Доказательство. Предположим, проекция неоднозначна, тогда найдутся две различные d-грани $\widetilde{P}$ и $\widetilde{P'}$ с пересекающимися по внутренней точке проекциями. Значит $\widetilde{P}$ и $\widetilde{P'}$ являются подъёмами одной и той же d-ячейки разбиения $\mathcal{T}$. По условию эти два подъёма содержат общую грань $\widetilde{F^{d-2}}$. Согласно следствию 2.5 подъёмы $\widetilde{P}$ и $\widetilde{P'}$ совпадают, то есть представляют одну и ту же d-грань полиэдра. Противоречие. ☐

Доказательство теоремы 2.3. Выберем внутри каждой ячейки $P_k \subset \mathcal{T}$ точку p_k. Пусть P_{k-1}, P_k — две смежные ячейки в $\mathcal{T}$, $\widetilde{P_{k-1}}, \widetilde{P_k} \subset \mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ — два смежных подъёма P_{k-1}, P_k, а $\widetilde{p_{k-1}} \in \widetilde{P_{k-1}}, \widetilde{p_k} \in \widetilde{P_k}$ — точки этих подъёмов, переходящие в p_{k-1} и p_k при ортогональной проекции.

Убедимся, что вектор $\widetilde{p_{k-1} p_k} = \widetilde{p_{k-1}} \widetilde{p_k}$ однозначно определён лишь выбором ячеек P_{k-1} и P_k. Действительно, если $\overline{P_{k-1}}, \overline{P_k} \subset \mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ — два других их смежных подъёма, то по лемме 2.4, имеем $\widetilde{P_{k-1}} \parallel \overline{P_{k-1}}$, $\widetilde{P_k} \parallel \overline{P_k}$. Отсюда очевидно, что $\overline{P_{k-1}} \bigcup \overline{P_k}$ является параллельным

переносом $\widetilde{P_{k-1}} \bigcup \widetilde{P_k}$ вдоль нормали $\mathbf{n}_0 \perp \mathbb{E}^d$. Но тогда соответствующий вектор $\overline{p_{k-1}p_k}$ равен своему параллельному переносу $\widetilde{p_{k-1}p_k}$.

Таким образом определены векторные приращения $v\left[P_{k-1}, P_k\right] = \widetilde{p_{k-1}p_k}$ на парах смежных ячеек разбиения $\mathcal{T}$. Воспользуемся аддитивной версией теоремы 1.4, чтобы показать, что такие приращения задают однозначную вектор-функцию $v\left(P\right)$ на d-ячейках P разбиения $\mathcal{T}$. Для этого достаточно показать, что на любом $(d-2)$-примитивном цикле в $\mathcal{T}$ приращение равно нулю. Рассмотрим $(d-2)$-грань F^{d-2} и примитивный в ней цикл $[P_{i_1}, \ldots, P_{i_m} = P_{i_1}]$. Пусть $\widetilde{P_{i_1}}$ — некоторая грань $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ с проекцией P_{i_1}. Эта грань однозначно определяет подъём $\widetilde{F^{d-2}} \subset \widetilde{P_{i_1}}$ и соответствующую примитивную в $\widetilde{F^{d-2}}$ цепь $\left[\widetilde{P_{i_1}}, \ldots, \widetilde{P_{i_m}}\right]$. По лемме 2.6 ортогональная проекция $St_{\mathcal{G}_{\mathcal{T}}}\left(\widetilde{F^{d-2}}\right)$ на $\mathcal{T}$ однозначна. Отсюда вытекает, что грани $\widetilde{P_{i_1}}$ и $\widetilde{P_{i_m}}$ совпадают, так же как и соответствующие точки $\widetilde{p_{i_1}}$ и $\widetilde{p_{i_m}}$. Приращение вдоль цепи $\left[\widetilde{P_{i_1}}, \ldots, \widetilde{P_{i_m}}\right]$ равно $v\left[\widetilde{P_{i_1}}, \widetilde{P_{i_2}}\right] + v\left[\widetilde{P_{i_2}}, \widetilde{P_{i_3}}\right] + \ldots + v\left[\widetilde{P_{i_{m-1}}}, \widetilde{P_{i_m}}\right] = \widetilde{p_{i_1}p_{i_2}} + \ldots + \widetilde{p_{i_{m-1}}p_{i_m}} = \widetilde{p_{i_1}}\widetilde{p_{i_2}} + \ldots + \widetilde{p_{i_{m-1}}}\widetilde{p_{i_m}} = \widetilde{p_{i_1}}\widetilde{p_{i_m}} = 0$

Таким образом, приращения корректно задают некоторую вектор-функцию $v\left(P\right)$, определённую однозначно, с точностью до выбора начального значения на одной фиксированной ячейке. Зададим значение $v\left(P_0\right) = p_0$. Тогда значение $v\left(P_k\right) = v\left(P_0\right) + v\left[P_0, \ldots, P_k\right] = p_0 + \widetilde{p_0}\widetilde{p_1} + \ldots + \widetilde{p_{k-1}}\widetilde{p_k}$, где $\widetilde{p_i}$ — это точка с проекцией p_i, лежащая в d-грани $\widetilde{P_i} \subset \mathcal{G}_{\mathcal{T}}$, поднятой вдоль данной цепи $[P_0, \ldots, P_k]$, а $\widetilde{p_0} = p_0$. Таким образом $v\left(P_k\right) = p_0 + p_0\widetilde{p_k} = \widetilde{p_k}$. То есть значение $v\left(P_k\right)$, с одной стороны, определено однозначно, с другой — принадлежит произвольному подъёму $\widetilde{P_k} \subset \mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ ячейки P_k. Согласно предложению 2.5 все такие подъёмы совпадают и представляют одну и ту же грань $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$. Таким образом над каждой d-гранью P из разбиения $\mathcal{T}$ есть в точности один её подъём, принадлежащий полиэдру $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$. Значит ортогональная проекция $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ на $\mathbb{E}^d$ однозначна. В частности, отсюда следует, что $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ является однолистной накрывающей $\mathbb{E}^d$, а значит является d-многообразием и женератрисой.

Для доказательства теоремы в обратную сторону, достаточно выбрать для каждой d-грани женератрисы нормаль с $(d+1)$-ой координатой равной -1. Тем самым будут заданы приращения нормали (все будут параллельны $\mathbb{E}^d$) и нормировка s. Легко видеть, что она будет канонической. □

2.4 Женератриса как функция

Из однозначности проекции $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ на $\mathbb{E}^d$ следует, что $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ является графиком некоторой функции $G(x) : \mathbb{E}^d \to \mathbb{R}$. Эту функцию, как и саму построенную поверхность, также будем называть женератрисой.

Лемма 2.7. *Пусть P — произвольная d-ячейка разбиения $\mathcal{T}$, $[P_0, \ldots, P_k = P]$ — некоторая цепь, соединяющая P_0 с P, тогда для любой пары точек $x_1, x_2 \in P$ выполнено*

$$G(x_1) - G(x_2) = (x_1 - x_2)^T \sum_{i=0}^{k-1} s\left(P_i \bigcap P_{i+1}\right) \mathbf{n}_{i,i+1}$$

Доказательство. По определению, точки женератрисы над ячейкой P имеют вид $(x, G(x))$, где $x \in P$. По построению, эти точки лежат в d-плоскости с нормалью $\mathbf{n}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} s\left(P_i \bigcap P_{i+1}\right) \mathbf{n}_{i,i+1}$, где $\mathbf{n}_0 = (0, \ldots, 0, -1)^T \in \mathbb{E}^{d+1}$, $\mathbf{n}_{i,i+1} \parallel \mathbb{E}^d$. Из ортогональности имеем:

$$0 = ((x_1, G(x_1)) - (x_2, G(x_2)))^T \cdot \left(\sum_{i=0}^{k-1} s\left(P_i \bigcap P_{i+1}\right) \mathbf{n}_{i,i+1} + \mathbf{n}_0 \right) =$$

$$= (x_1 - x_2)^T \cdot \sum_{i=0}^{k-1} s\left(P_i \bigcap P_{i+1}\right) \mathbf{n}_{i,i+1} + (G(x_1) - G(x_2)) \cdot (-1)$$

Что и требовалось доказать. $\square$

Следствие 2.8. *Пусть задана точка $x \in P \subset \mathcal{T}$. Пусть также $[P_0, P_1, \ldots, P_k = P]$ — произвольная цепь, соединяющая начальную ячейку построения женератрисы P_0 с P, а точки $x_1, \ldots, x_k$ выбраны так, что $x_i \in P_{i-1} \bigcap P_i$. Тогда*

$$G(x) = x^T \sum_{i=0}^{k-1} s\left(P_i \bigcap P_{i+1}\right) \mathbf{n}_{i,i+1} - \sum_{i=0}^{k-1} x_{i+1}^T s\left(P_i \bigcap P_{i+1}\right) \mathbf{n}_{i,i+1}$$

Доказательство. По построению P_0 лежит в плоскости $x^{d+1} = 0$ в расширенном пространстве $\mathbb{E}^{d+1}$. Значит $G(x_1) = 0$. Тогда $G(x) = G(x) - G(x_1) = (G(x) - G(x_k)) + \sum_{i=1}^{k-1} (G(x_{i+1}) - G(x_i))$. Подставим выражения для этих разностей из леммы 2.7 и приведём подобные. $\square$

Будем пользоваться стандартным обозначением $epi\, G$ для надграфика женератрисы $epi\, G = \left\{(x, y) \in \mathbb{E}^d \times \mathbb{R} |\ y \geqslant G(x)\right\} \subset \mathbb{E}^{d+1}$.

Лемма 2.9. *Двугранный угол при произвольной $(d-1)$-грани надграфика $epi\, G$ меньше развёрнутого.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный двугранный угол надграфика, образованный смежными подъёмами $\widetilde{P}, \widetilde{P'} \subset \mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ d-мерных ячеек $P, P' \subset \mathcal{T}$. При построении женератрисы для $\widetilde{P}$ была задана нормаль $\mathbf{h}_P$ представленная в каноническом виде $\mathbf{h}_P = \mathbf{n}_0 + \sum s\left(P_i \bigcap P_{i,i+1}\right) \mathbf{n}_{i,i+1}$, где сумма конечна и вычисляется вдоль некоторой цепи в $\mathcal{T} \subset \mathbb{E}^d$, $\mathbf{n}_{i,i+1} \parallel \mathbb{E}^d$, а $\mathbf{n}_0 = (0, \ldots, 0, -1)^T$ — вектор с единственной -1 в $(d+1)$-ом разряде. Таким образом, $(d+1)$-ая координата $\mathbf{h}_P$ также равна -1, и для $\widetilde{P}$ можно корректно определить "верхнее" и "нижнее" полупространства относительно $aff\left(\widetilde{P}\right)$: "нижнее" — то, в которое выходит $\mathbf{h}_P$. У $\widetilde{P}$ и $\widetilde{P'}$ общая $(d-1)$-грань, поэтому достаточно показать, что хотя бы одна точка $\widetilde{P'}$ лежит в "верхнем" полупространстве (без границы) относительно $aff\left(\widetilde{P}\right)$. Из этого будет следовать, что вся грань $\widetilde{P'}$ (кроме точек $\widetilde{P} \bigcap \widetilde{P'}$) лежит в этом полупространстве. Это и будет означать, что двугранный угол между ними (относящийся к $epi\, G$), меньше развёрнутого.

Рассмотрим произвольный отрезок $x_0x_2 \subset \mathbb{E}^d$ такой, что $x_0 \in Int\,(P)\,, x_2 \in Int\,(P')$ и отрезок пересекает гипергрань $P \bigcap P'$ в точке x_1. По лемме 2.7 имеем $G(x_1)-G(x_0) = (x_1-x_0)^T(\mathbf{h}_P - \mathbf{n}_0)$. Очевидно, что уравнение $y - G(x_0) = (x-x_0)^T(\mathbf{h}_P - \mathbf{n}_0)$ задаёт d-плоскость $aff\left(\widetilde{P}\right)$. Значит для точки $(x_2, y_2) \in aff\left(\widetilde{P}\right)$ имеем $y_2 - G(x_0) = (x_2-x_0)^T(\mathbf{h}_P - \mathbf{n}_0)$. Из той же леммы 2.7 имеем $G(x_2)-G(x_1) = (x_2-x_1)^T(\mathbf{h}_P - \mathbf{n}_0 + s\,(P \bigcap P')\,\mathbf{n}')$, где $\mathbf{n}'$ — единичная нормаль к $P \bigcap P'$, направленная от P к P'. Отсюда $G(x_2) = y_2 + (x_2-x_1)^T s\,(P \bigcap P')\,\mathbf{n}'$. Вектор $(x_2 - x_1)$ пересекает $P \bigcap P'$ и направлен строго внутрь P', Нормаль $\mathbf{n}'$ к $P \bigcap P'$ также направлена внутрь P', $s\,(P \bigcap P') > 0$. Значит $(x_2-x_1)^T s\,(P \bigcap P')\,\mathbf{n}' > 0$ и $G(x_2) > y_2$. Лемма доказана. □

Теорема 2.10. *Женератриса $\mathcal{G}_\mathcal{T}$ разбиения $\mathcal{T}$, построенная по канонической нормировке s, задаёт выпуклую непрерывную кусочно-линейную функцию $G(x)$ и, соответственно, является границей выпуклого $(d+1)$-мерного полиэдра.*

Доказательство. Кусочная линейность $G(x)$ следует из определения женератрисы, непрерывность — из теоремы 2.3. Остаётся показать выпуклость $G(x)$, то есть что для любой пары точек $x, y \in \mathbb{E}^d$ отрезок, соединяющий точки $(x, G(x))$ и $(y, G(y))$, принадлежит надграфику $epi\,G(x)$. Для любого малого $\varepsilon > 0$ в ε-окрестности x и y найдутся, соответственно, точки x' и y', которые лежат строго внутри некоторых d-ячеек разбиения $\mathcal{T}$, прямая $x'y'$ не пересекает $(d-2)$-остов разбиения $\mathcal{T}$, а $(d-1)$-грани пересекает не более чем по одной точке. Действительно, выберем сначала в $\frac{\varepsilon}{4}$- окрестностях x и y точки x''' и y''', не принадлежащие $\mathcal{F}^{d-1}$. Это можно сделать, так как $(d-1)$-остов является локально-конечным объединением множеств d-мерной меры нуль в $\mathbb{E}^d$. В $\frac{\varepsilon}{4}$-окрестностях x''' и y''' выберем точки x'' и y'' так, что направление $x''y''$ не параллельно ни одной $(d-1)$-грани разбиения $\mathcal{T}$. Это возможно, так как таких гиперграней счётное количество, каждая из них “запрещает” направления некоторого проективного $(d-2)$-подпространства $P\mathbb{R}^{d-1}$. По теореме Бэра, объединение счётного числа таких подмножеств меры нуль не покрывает никакое открытое множество в проективном пространстве $P\mathbb{R}^d$ всех направлений в $\mathbb{E}^d$, в том числе — никакую окрестность направления $x'''y'''$. Наконец, спроектируем все грани $(d-2)$-остова $\mathcal{K}^{d-2}$ вдоль направления $x''y''$ в дополнительное $(d-1)$-подпространство (относительно $\mathbb{E}^d$). Грани остова перейдут в счётное число многогранников размерности не более $(d-2)$, то есть множеств меры нуль в этом $(d-1)$-подпространстве. Это множество не покрывает $\frac{\varepsilon}{4}$-окрестности точки, в которую проектируется сама прямая $x''y''$. Значит, найдётся параллельный перенос прямой на вектор длины не более $\frac{\varepsilon}{4}$, который не пересекает $\mathcal{K}^{d-2}$. Образы точек x'' и y'' при этом переносе обозначим x' и y', которые и есть искомые точки.

Рассмотрим двумерную плоскость $\pi \in \mathbb{E}^{d+1}$, которая содержит прямую $x'y'$ и ортогональна $\mathbb{E}^d$. Для любой точки z прямой $x'y'$, соответствующая точка женератрисы $(z, G(z))$ также принадлежит π. По построению π пересекает только d и $(d-1)$-мерные грани $\mathcal{T}$, причём $(d-1)$-мерные — только в одной точке. Отсюда следует, что то же самое верно и для пересечения π с $\mathcal{G}_\mathcal{T}$.

Множество M называется *локально выпуклым* в точке x, если найдётся такое открытое множество $U \ni x$, что $M \bigcap U$ выпукло. Покажем, что надграфик $epi\,G|_{x'y'}$ функции

$G(x)$, ограниченной на прямую $x'y'$, является локально выпуклым. Для внутренних точек надграфика и внутренних точек одномерных рёбер надграфика это очевидно. Вершины $epi\,G|_{x'y'}$ — пересечение π с внутренностью $(d-1)$-мерных граней $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$. Согласно лемме 2.9, двугранный угол в $(d-1)$-гранях $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ меньше развёрнутого. Отсюда следует, что надграфик $epi\,G$ локально выпуклый во внутренних точках $(d-1)$-граней: достаточно рассмотреть шаровую окрестность соответствующей точки, не пересекающую других граней $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$. Таким образом $epi\,G|_{x'y'}$ в любой своей вершине является пересечением локально выпуклого в этой точке $epi\,G$ и выпуклой двумерной плоскости. Отсюда $epi\,G|_{x'y'}$ также является локально выпуклым в вершинах, а значит и во всех своих точках.

Воспользуемся теоремой Бёрдона [18, Теорема 7.5.1] о том, что замкнутое линейно-связное локально выпуклое подмножество двумерной плоскости является выпуклым. Из теоремы следует, что $epi\,G|_{x'y'}$ выпуклый. Значит ему принадлежит весь отрезок соединяющий $(x', G(x'))$ и $(y', G(y'))$. Значит этот отрезок принадлежит и надграфику $epi\,G$. Так как G непрерывна, а точки x', y' выбирались сколь угодно близко к x, y, то и отрезок, соединяющий $(x, G(x))$ и $(y, G(y))$, также принадлежит $epi\,G$. Теорема доказана. □

Следствие 2.11. *Функция женератрисы $G(x)$ неотрицательна на $\mathbb{E}^d$.*

Доказательство. По доказанному, надграфик $epi\,G(x)$ выпуклый. Гипергранью этого надграфика является d-мерная ячейка P_0 — начальная ячейка построения женератрисы. Из выпуклости следует, что $epi\,G(x)$ лежит в одном полупространстве относительно гиперплоскости $aff\,(P_0) = \left\{x^{d+1} = 0\right\}$. □

3 Женератриса Вороного

3.1 Вычисление значений

Вернёмся к разбиениям на параллелоэдры. Пусть в пространстве $\mathbb{E}^d$ задано нормальное разбиение $\mathcal{T}_P$, порождённое параллелоэдром P, и существует каноническая нормировка s этого разбиения. По определению параллелоэдра, каждая ячейка этого разбиения совмещается с каждой другой при помощи некоторого параллельного переноса. Легко установить, что такой параллельный переводит разбиение $\mathcal{T}_P$ в себя [2]. Отсюда, как уже упоминалось, следует, что центры параллелоэдров разбиения образуют d-мерную целочисленную решётку $\Lambda^d(P)$ для некоторого базиса в $\mathbb{E}^d$. Вектора этой решётки — в точности вектора всех параллельных переносов $\mathbb{E}^d$, сохраняющих разбиение $\mathcal{T}_P$. Если при всех таких переносах нормировка s на гипергранях $\mathcal{T}_P$ сохраняется, то будем называть её *трансляционно инвариантной.* Доказательство следующей леммы было предложено А. Гарбером в личных обсуждениях.

Лемма 3.1. *Если для данного разбиения $\mathcal{T}_P$ существует некоторая каноническая нормировка s, то существует и трансляционно инвариантная каноническая нормировка данного разбиения.*

Доказательство. Выберем произвольный параллелоэдр P_0 данного разбиения. Если нормировки на какой-то его паре противоположных гиперграней F_1 и F_1' не равны, то из леммы 1.7 следует, что все $(d-2)$-подграни F_1 стандартны: если есть хотя бы одна примитивная, то ей соответствует 6-поясок, содержащий F_1 и F_1' и согласно этой лемме, $s(F_1) = s(F_1')$, что неверно. Тогда заменим нормировки всех гиперграней в $\mathcal{T}_P$ параллельных F_1 на $s(F_1)$. Легко видеть, что все эти грани — суть параллельные переносы F_1, при которых разбиение переходит в себя. Значит, по доказанному, такая замена нормировки затронет лишь звёзды стандартных $(d-2)$-граней. Из предложения 1.8 следует, что в каждой из этих $(d-2)$-граней новая нормировка осталась канонической (то есть кручение вокруг данной $(d-2)$-грани равно 0). Значит и в целом новая нормировка — каноническая.

Таким образом, можем считать, что нормировка s совпадает на противоположных гранях P_0. Значит параллельные переносы P_0 вместе с его нормировкой на вектора решётки $\Lambda^d(P)$ корректно задают некоторую трансляционно инвариантную нормировку s'. Покажем, что s' также каноническая. Кручение $\Delta_{s'}\left(F^{d-2}\right)$ вокруг произвольной $(d-2)$-грани разбиения равно кручению нормировки s' вокруг некоторого $\left(F^{d-2}\right)'$ — параллельного переноса F^{d-2}, который принадлежит P_0. Поэтому сразу считаем, что $F^{d-2} \subset P_0$. Если F^{d-2} стандартна, то из предложения 1.8 следует $\Delta_{s'}\left(F^{d-2}\right) = 0$. Если F^{d-2} примитивная, то обозначим через F_2 и F_3 гиперграни P_0, содержащие F^{d-2}, $[F_1, F_2, \ldots, F_6]$ — соответствующий 6-поясок, F_0-третья гипергрань разбиения, содержащая F^{d-2}. По лемме 1.7 для исходной нормировки s и накрест лежащих гиперграней F_0 и F_1 имеем $s(F_1) = s(F_0)$. По определению s' выполнено $s'(F_0) = s(F_1) = s(F_0),\ s'(F_2) = s(F_2),\ s'(F_3) = s(F_3)$. Кручение нормировки s вокруг F^{d-2} равно 0, и его слагаемые в точности равны слагаемым кручения нормировки s' вокруг F^{d-2}. Значит $\Delta_{s'}\left(F^{d-2}\right) = \Delta_s\left(F^{d-2}\right) = 0$. Значит s' — каноническая и трансляционно инвариантная. □

Далее считаем, что заданная на разбиении $\mathcal{T}_P$ каноническая нормировка s трансляционно инвариантна. Согласно приведённой в разделе 2.2 конструкции, $\mathcal{T}_P$ и s однозначно задают женератрису $\mathcal{G}_P \subset \mathbb{E}^{d+1}$. *Фасетным вектором* разбиения $\mathcal{T}_P$ называется всякий вектор, соединяющий центры двух смежных по общей гиперграни ячеек. Зафиксируем некоторую ячейку разбиения P_0. Пусть $\{P_1, P_2, \ldots P_k\}$ — все параллелоэдры, смежные с P_0. Центр ячейки P_i обозначим $c(P_i)$. Очевидно, все фасетные вектора разбиения можно представить в виде $\mathbf{p}_i = c(P_0)c(P_i)$ (все эти вектора делятся на пары дающих в сумме ноль). Также обозначим $\mathbf{m}_i = s(P_0 \bigcap P_i)\mathbf{n}_{0,i}$. Через $P(\mathbf{p})$ будем обозначать копию параллелоэдра P с центром в точке $\mathbf{p}$.

Лемма 3.2. *Для произвольных индексов i, j выполнено равенство $\mathbf{p}_i^T\mathbf{m}_j = \mathbf{p}_j^T\mathbf{m}_i$.*

Доказательство. Вычислим значение $G(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)$ двумя способами: вдоль цепи $[P_0, P(\mathbf{p}_1), P(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)]$ и вдоль цепи $[P_0, P(\mathbf{p}_2), P(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)]$. Середины отрезков $(0, \mathbf{p}_1)$ и $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)$ являются центрами симметрии соответствующих пар смежных параллелоэдров и принадлежат соответствующим гиперграням. Выберем эти точки $x_1 = \frac{\mathbf{p}_1}{2}$ и $x_2 = \mathbf{p}_1 + \frac{\mathbf{p}_2}{2}$ как вспомогательные, положим $x = \mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2$ и воспользуемся следствием 2.8. Получаем

$$G(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2) = (\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)^T(\mathbf{m}_1+\mathbf{m}_2) - \left(\frac{\mathbf{p}_1}{2}^T\mathbf{m}_1 + \left(\mathbf{p}_1+\frac{\mathbf{p}_2}{2}\right)^T\mathbf{m}_2\right)$$

Тут мы воспользовались наблюдением, что гипергрань между $P(\mathbf{p}_1)$ и $P(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)$ параллельна гиперграни между $P(0)$ и $P(\mathbf{p}_2)$, значит их нормали параллельны, а нормировки равны. Аналогично для второй цепи имеем $G(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^T(\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2) - \left(\frac{\mathbf{p}_2}{2}^T\mathbf{m}_2 + \left(\mathbf{p}_2 + \frac{\mathbf{p}_1}{2}\right)^T\mathbf{m}_1\right)$. Приводим подобные и получаем требуемое равенство. □

Пусть $\mathcal{P} = (\mathbf{p}_1|\dots|\mathbf{p}_k)$ — это матрица $d \times k$, составленная из всех фасетных векторов параллелоэдра P_0, где i-й столбец представлен вектором $\mathbf{p}_i$. Матрица $\mathcal{M} = (\mathbf{m}_1|\dots|\mathbf{m}_k)$ — матрица, составленная по тем же правилам из векторов $\mathbf{m}_i$.

Лемма 3.3. *Для произвольных целых чисел $l_1, \dots, l_k$ и вектора $L = (l_1, \dots, l_k)$ выполнено:*

$$G\left(l_1\mathbf{p}_1 + \ldots + l_k\mathbf{p}_k\right) = \frac{1}{2}\left(l_1\mathbf{p}_1 + \ldots + l_k\mathbf{p}_k\right)^T\left(l_1\mathbf{m}_1 + \ldots + l_k\mathbf{m}_k\right) = \frac{1}{2}L\mathcal{P}^T\mathcal{M}L^T$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательные точки $x_1 = \frac{\mathbf{p}_1}{2}, x_2 = \mathbf{p}_1 + \frac{\mathbf{p}_1}{2}, \dots, x_{l_1} = (l_1 - 1)\mathbf{p}_1 + \frac{\mathbf{p}_1}{2}, x_{l_1+1} = l_1\mathbf{p}_1 + \frac{\mathbf{p}_2}{2}, \dots, x_{\sum l_i} = l_1\mathbf{p}_1 + \ldots + (l_k - 1)\mathbf{p}_k + \frac{\mathbf{p}_k}{2}$. Если некоторое l_i отрицательно, то рассматриваем слагаемое $l_i\mathbf{p}_i$ как $|l_i|(-\mathbf{p}_i)$. Воспользуемся следствием 2.8. Первое равенство из доказываемой цепочки получается приведением подобных и использованием леммы 3.2. Второе равенство — матричная запись полученного выражения. □

Замечание. *Из следствия 2.8 напрямую вытекает, что вектор $(l_1\mathbf{m}_1 + \ldots + l_k\mathbf{m}_k) = \mathcal{M}L^T$ является градиентом G над ячейкой $P\left(l_1\mathbf{p}_1 + \ldots + l_k\mathbf{p}_k\right)$.*

Элегантное доказательство следующей леммы практически дословно повторяет доказательство из работы [15]. Для полноты изложения и самодостаточности работы мы приводим его в терминах канонических нормировок.

Лемма 3.4. *Существует единственная симметричная невырожденная $d \times d$ матрица Q такая, что $\mathcal{M} = Q\mathcal{P}$.*

Доказательство. Выберем набор индексов $\{i_1, \dots, i_d\} \subset \{1, \dots, k\}$ такой, что вектора $\mathbf{p}_{i_1}, \dots, \mathbf{p}_{i_d}$ линейно независимы. Такой набор из d фасетных векторов обязательно найдётся, так как, по очевидным причинам, полный набор $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k$ своими целочисленными линейными комбинациями порождает решётку $\Lambda^d(P)$ [2]. Обозначим через $\mathcal{P}_0$ минор $\mathcal{P}$ составленный только из столбцов $\mathbf{p}_{i_1}, \dots, \mathbf{p}_{i_d}$, $\mathcal{M}_0$ — минор $\mathcal{M}$, составленный из столбцов с теми же индексами. По выбору $\mathcal{P}_0$ — невырожденная матрица.

Из равенства $\mathbf{p}_i^T\mathbf{m}_j = \mathbf{p}_j^T\mathbf{m}_i$ следует, что $\mathcal{P}^T\mathcal{M} = \mathcal{M}^T\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}_0^T\mathcal{M} = \mathcal{M}_0^T\mathcal{P}$. Обозначим $Q := \left(\mathcal{P}_0^T\right)^{-1}\mathcal{M}_0^T$, тогда $\mathcal{M} = \left(\mathcal{P}_0^T\right)^{-1}\mathcal{M}_0^T\mathcal{P} = Q\mathcal{P}$. Отсюда, в частности, $\mathbf{m}_i = Q\mathbf{p}_i$ и следовательно $\mathcal{M}_0 = Q\mathcal{P}_0$. Значит для Q также выполнено $Q = \mathcal{M}_0\mathcal{P}_0^{-1}$, откуда $Q = \left(\mathcal{P}_0^T\right)^{-1}\mathcal{M}_0^T = \left(\mathcal{M}_0\mathcal{P}_0^{-1}\right)^T = Q^T$, то есть Q симметрична.

Из равенства $\mathcal{M} = Q\mathcal{P}$ и из того, что ранг матрицы $\mathcal{M}$ (нормалей к гиперграням параллелоэдра P) равен d, следует, что ранг $d \times d$ матрицы Q также равен d и Q невырождена. Единственность следует из необходимого равенства $\mathcal{M}_0 = Q\mathcal{P}_0$. □

Следствие 3.5. *Пусть x — центр произвольной ячейки $P(x)$ разбиения $\mathcal{T}_P$. Тогда $G(x) = \frac{1}{2}x^t Qx$.*

Доказательство. Центр произвольного параллелоэдра разбиения представляется в виде некоторой целочисленной линейной комбинации $x = l_1\mathbf{p}_1 + \ldots + l_k\mathbf{p}_k = \mathcal{P}L^T$. По лемме 3.3 $G(x) = G\left(l_1\mathbf{p}_1 + \ldots + l_k\mathbf{p}_k\right) = \frac{1}{2}L\mathcal{P}^T\mathcal{M}L^T$, что по лемме 3.4 равно $\frac{1}{2}\left(L\mathcal{P}^T\right)Q\mathcal{P}L^T = \frac{1}{2}x^TQx$. □

Обозначим через $Q(x)$ квадратичную форму на $\mathbb{E}^d$, заданную симметричной матрицей Q: $Q(x) = \frac{1}{2}x^tQx$. Непосредственно из определения и следствия 3.5 следует

Предложение 3.6. *Значения $Q(x)$ и $G(x)$ на центрах параллелоэдров разбиения $\mathcal{T}_P$ совпадают.*

Лемма 3.7. *Форма $Q(x)$ положительно определена.*

Доказательство. Докажем сначала, что $Q(x)$ неотрицательно определена. Действительно, если для некоторой точки x^* выполнено $Q(x^*) < 0$, то существует не содержащая нуля шаровая окрестность $B_\delta(x^*)$, на точках которой $Q(x)$ также отрицательна. Значит $Q(x)$ отрицательна на всех точках конуса над $B_\delta(x^*)$ с вершиной в нуле. Этот конус содержит шар сколь угодно большого радиуса, а значит содержит некоторую точку x_Λ решётки $\Lambda^d(P)$. Тогда, с одной стороны, $Q(x_\Lambda) < 0$, с другой $Q(x_\Lambda) = G(x_\Lambda) \geqslant 0$ по следствию 2.11. Противоречие. Значит $Q(x)$ неотрицательна определена. Кроме того, по лемме 3.4, матрица Q невырождена, значит $Q(x)$ положительно определена. □

Теорема 3.8. *График квадратичной формы $Q(x)$ — эллиптический параболоид $\Pi_P \subset \mathbb{E}^{d+1}$. Π_P вписан в женератрису $\mathcal{G}_P$ и касается её над всеми центрами ячеек разбиения $\mathcal{T}_P$.*

Доказательство. То, что Π_P является эллиптическим параболоидом, эквивалентно лемме 3.7. Значения $Q(x)$ и $G(x)$ совпадают над центрами ячеек $\mathcal{T}_P$. Докажем касание их графиков в этих точках. Для этого достаточно доказать пропорциональность градиентов в центре x произвольной ячейки. Пусть x выражается через фасетные вектора в виде целочисленной линейной комбинации $x = l_1\mathbf{p}_1 + \ldots + l_k\mathbf{p}_k$. Согласно замечанию к лемме 3.3, градиент $G(x)$ над ячейкой $P(x)$ равен $l_1\mathbf{m}_1 + \ldots + l_k\mathbf{m}_k$. Из леммы 3.4 это выражение равно $l_1Q\mathbf{p}_1 + \ldots + l_kQ\mathbf{p}_k = Qx$. Градиент $Q(x)$ равен Qx во всех точках. Касание доказано. Осталось заметить, что эллиптический параболоид — строго выпуклое $(d+1)$-мерное тело и лежит строго в одном полупространстве относительно любой своей касательной плоскости. □

3.2 Искомое аффинное преобразование

По теореме из линейной алгебры, существует невырожденное линейное преобразование $\mathcal{A}_d$, при котором положительно определённая квадратичная форма Q переходит в стандартную квадратичную форму с единичной матрицей $I = diag\,(1, 1, \ldots, 1)$. Обычно это утверждение формулируется в терминах замен координат и подразумевает, что квадратичной форме $Q(x)$ соответствует такая форма $Q_{\mathcal{A}}$, что для всех $x \in \mathbb{E}^d$ верно $Q_{\mathcal{A}}\left(\mathcal{A}_d x\right) = Q(x)$. Мы покажем, что линейное преобразование $\mathcal{A}_d$, с точностью до дополнительных параллельных переносов, является искомым аффинным преобразованием, переводящим исходный параллелоэдр P в некоторый параллелоэдр Вороного.

Отображение $\mathcal{A}_d : \mathbb{E}^d \to \mathbb{E}^d$ продолжается до невырожденного линейного преобразования $\mathcal{A}_{d+1} : \mathbb{E}^{d+1} \to \mathbb{E}^{d+1}$ по правилу $\mathcal{A}_{d+1} : \binom{x}{x^{d+1}} \mapsto \binom{\mathcal{A}_d x}{x^{d+1}}$, для произвольной $x \in \mathbb{E}^d$ и $x^{d+1} \in \mathbb{R}$. Тогда $\mathcal{A}_d = \mathcal{A}_{d+1}|_{x^{d+1}=0}$.

Отображение $\mathcal{A}_d$ переводит разбиение $\mathcal{T}_P$ пространства $\mathbb{E}^d$ в разбиение $\mathcal{A}_d\mathcal{T}_P$, ячейки которого совмещаются каждая с каждой при помощи подходящего параллельного переноса. Значит многогранник $\mathcal{A}_d P$ также является параллелоэдром и $\mathcal{A}_d\mathcal{T}_P = \mathcal{T}_{\mathcal{A}_d P}$.

Лемма 3.9. *Отображение $\mathcal{A}_{d+1}$ переводит параболоид Π_P в стандартный параболоид $\Pi_I = \left\{y = \left(y^1, \ldots, y^{d+1}\right)^T \mid y^{d+1} = \sum_{i=1}^d \left(y^i\right)^2\right\}$, женератрису $\mathcal{G}_P$ — в женератрису $\mathcal{G}_{\mathcal{A}_d P}$ разбиения $\mathcal{T}_{\mathcal{A}_d P}$. При этом Π_I вписан в $\mathcal{G}_{\mathcal{A}_d P}$, а проекции точек касания — суть центры параллелоэдров разбиения $\mathcal{T}_{\mathcal{A}_d P}$.*

Доказательство. По определению $\mathcal{A}_{d+1}\begin{pmatrix} x \\ Q(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_d x \\ Q(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_d x \\ Q_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}_d x)\end{pmatrix}$. Значит $\mathcal{A}_{d+1}\Pi_P \subset \Pi_I = \left\{\begin{pmatrix} y \\ Q_{\mathcal{A}}(y)\end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{E}^d\right\}$. Так как $\mathcal{A}_d$ невырождено, то для произвольного y найдётся прообраз x. Значит $\mathcal{A}_{d+1}\Pi_P = \Pi_I$. Из определения следует, что $\mathcal{A}_{d+1}$ переводит проекции фигур на $\mathbb{E}^d$ в проекции образов этих фигур на $\mathbb{E}^d$. Отсюда следуют остальные утверждения леммы. □

Лемма 3.10. *Разбиение $\mathcal{T}_{\mathcal{A}_d P}$ является разбиением на параллелоэдры Вороного.*

Доказательство. Для стандартного параболоида Π_I рассмотрим фокус F и директрису D: точку $\left(0, \ldots, 0, \frac{1}{4}\right)^T \in \mathbb{E}^{d+1}$ и гиперплоскость $\left\{y^{d+1} = -\frac{1}{4}\right\}$ соответственно. Известный факт, что Π_I — множество точек равноудалённых от F и D. Пусть точки T_1 и T_2 — точки касания гиперплоскостей H_1 и H_2 с Π_I, точка M — произвольная точка из $H_1 \bigcap H_2$. T_1'', T_2'', M'' — ортогональные проекции соответствующих точек на директрису, а T_1', T_2', M' — их ортогональные проекции на $\mathbb{E}^d = \left\{y^{d+1} = 0\right\}$. По, так называемому, оптическому свойству параболоида, F и T_1'' симметричны относительно H_1, F и T_2'' симметричны относительно H_2. Так как $M \in H_1 \bigcap H_2$, то $MT_1'' = MF = MT_2''$. Отсюда, очевидно, $M''T_1'' = M''T_2''$. Из параллельности гиперплоскостей $\left\{y^{d+1} = -\frac{1}{4}\right\}$ и $\left\{y^{d+1} = 0\right\}$ следует, что и для проекций на $\mathbb{E}^d$ выполнено $M'T_1' = M'T_2'$. Значит, в силу произвольности выбора M, проекция $H_1 \bigcap H_2$ на $\mathbb{E}^d$ — это $(d-1)$-плоскость, равноудалённая от точек T_1' и T_2', то есть срединный перпендикуляр к отрезку $T_1'T_2'$.

Пусть T_1 и T_2 — точки касания произвольных двух ячеек $\widetilde{P_1}$ и $\widetilde{P_2}$ из $\mathcal{G}_{\mathcal{A}_d P}$ с Π_I. Очевидно, $\widetilde{P_1}$ принадлежит одной из двух полуплоскостей, на которые $H_1 \bigcap H_2$ разбивает H_1. Проекция этой полуплоскости на $\mathbb{E}^d$ — d-полуплоскость, ограниченная срединным перпендикуляром к отрезку $T_1'T_2'$: $\left\{x \in \mathbb{E}^d : \|x - T_1'\| \leqslant \|x - T_2'\|\right\}$. Пусть точка T_1 фиксирована, а T_2 пробегает все остальные точки касания женератрисы с Π_I. Пересечение построенных полуплоскостей гиперплоскости H_1 равно самой грани $\widetilde{P_1} \subset \mathcal{G}_{\mathcal{A}_d P}$. Проекция данного пересечения, с одной стороны — это $\left\{x \in \mathbb{E}^d : \|x - T_1'\| \leqslant \|x - \mathbf{p}\|, \forall \mathbf{p} \in \Lambda^d\left(\mathcal{A}_d P\right)\right\}$ — параллелоэдр Вороного для решётки $\Lambda^d\left(\mathcal{A}_d P\right)$. С другой стороны — это проекция грани женератрисы, то есть d-мерная ячейка разбиения $\mathcal{T}_{\mathcal{A}_d P}$. □

Теорема 3.11. *Гипотеза Вороного выполнена для некоторого параллелоэдра P тогда и только тогда, когда существует каноническая нормировка разбиения $\mathcal{T}_P$.*

Доказательство. Применяя последовательно лемму 3.1, теорему 2.3, теорему 3.8 и лемму 3.10 получаем цепочку рассуждений: из существования некоторой канонической нормировки разбиения $\mathcal{T}_P$ следует существование трансляционно инвариантной канонической нормировки. Приведённая в разделе 2.2 конструкция по этой нормировке задаёт корректно определённую женератрису, в которую вписан график соответствующей положительно определённой квадратичной формы Q. Аффинное преобразование, приводящее график этой формы к виду стандартного параболоида вращения, заданного единичной матрицей, переводит параллелоэдр P в параллелоэдр Вороного. В одну сторону теорема доказана.

Для доказательства теоремы в обратную сторону отметим, что для произвольного разбиения на параллелоэдры Вороного существует женератриса: достаточно поднять точки решётки центров $\Lambda^d(P_V)$ на стандартный параболоид Π_I и провести через них касательные плоскости к параболоиду. Эти касательные плоскости ограничивают некоторый выпуклый $(d+1)$-полиэдр, описанный около Π_I. Аналогично доказательству леммы 3.10 имеем, что проекция полученного полиэдра — то же самое разбиение на параллелоэдры Вороного, d-мерная граница полиэдра — женератриса разбиения. Значит если нашлось аффинное преобразование, переводящее параллелоэдр в параллелоэдр Вороного, то обратное аффинное преобразование даст женератрису исходного разбиения. Отсюда, согласно теореме 2.3, у исходного разбиения есть каноническая нормировка. □

Следствие 3.12 (Теорема Житомирского)**.** *Всякий $(d-2)$-примитивный параллелоэдр P аффинно эквивалентен некоторому параллелоэдру Вороного.*

Доказательство. По лемме 1.10 для разбиения $\mathcal{T}_P$ существует каноническая нормировка, значит по теореме 3.11 для P верна гипотеза Вороного. □

3.3 Благодарности

Автор искренне благодарит Н.П. Долбилина, Р.М. Эрдала, А.И. Гарбера, А.Н. Магазинова за регулярные и плодотворные обсуждения и ценные замечания, В.П. Гришухина за

редкие, но ценные разговоры и предоставленные оттиски важных для написания данной работы статей Ч. Дэвиса и Ф. Ауренхаммера. Данная работа была выполнена в замечательных для работы условиях в Queen's University в г. Кингстон, Онтарио, Канада, коллективу которого автор также выражает свою искреннюю благодарность.

Список литературы

[1] Е.С. Фёдоров, Начала учения о фигурах. Санкт-Петербург, 1885

[2] Н.П. Долбилин, Свойства граней параллелоэдров. Труды МИАН (2009), 266, 112-126.

[3] H. Minkowski, Allgemeine Leherzätze über konvexe Polyeder. Nach. Ges. Wiss. Göttingen 1897, 198-219

[4] Delaunay B.N., Sur lá partition reguliére de l'espace a 4 dimension. Изв. АН СССР, (1929) No 1, 79-110, No 2, 147-164.

[5] Б.А. Венков, Об одном классе эвклидовых многогранников. Вестник Ленинградского Университета, сер. мат., физ., хим., 1954. Том 9, 11-31

[6] G. Voronoi, Nouvelles applications des paramétres continus á la theorie des formes quadratiques, II Mémoire: Recherches sur les paralléloédres primitifss. Crelle Journ., 134, 1909; Собрание сочинений, т. II (1952)

[7] O.K. Zhitomirskii, Verschärfung eines Satzes von Woronoi. Leningr. fiz.-math. Obshch. 2(1929), 131-151.

[8] A. Ordine, Proof of the Voronoi conjecture on parallelotopes in a new special case. Queen's University, Kingston (2005)

[9] A. Garber, A. Gavrilyuk, A. Magazinov, The Voronoi conjecture for parallelohedra with simply connected δ-surface. http://arxiv.org/abs/1212.1019v1

[10] В.П. Гришухин, Сумма параллелоэдра и отрезка по Минковскому, Матем. сб., 197:10 (2006), 15–32

[11] A. Magazinov, Voronoi's Conjecture for extensions of Voronoi parallelohedra, http://arxiv.org/abs/1308.6225v2

[12] R. Erdahl, Zonotopes, Dicings, and Voronoi's Conjecture on Parallelohedra. Eur. J. Comb., 20(6): 527-549 (1999)

[13] C. Davis, The set of non-linearity of a convex piecewise-linear function, Scripta Mathematica 24 (1959), 219-228

[14] P. McMullen, Duality, sections and projections of certain Euclidean tiliings, Geom. Dedicata 49 (1994), 183-202

[15] Deza M., Grishukhin V., Properties of parallelotopes equivalent to Voronoi's conjecture. Eur. J. of Comb., 25 (2004), 517-533.

[16] Александров А.Д., О заполнении пространства многогранниками. Вестник Ленинградского Университета, сер. мат., физ., хим., 1954. Том 2, 33-43

[17] Ryshkov S.S., Rybnikov Jr. K.A., The theory of quality translations with applications to tilings. Eur. J. Comb., 18(4):431-444, 1997.

[18] А. Бердон, Геометрия дискретных групп, пер. с англ. А.С. Солодовникова, "Наука", Москва, 1986